تعريف :

نسمي الزمرة الجزئية G في نصف الزمرة S زمرة جزئية عظمى في S إذا لم تكن محتواة في أي زمرة جزئية أخرى في S

مبرهنة :

لتكن S نصف زمرة ذات عنصر جامد ولتكن H_e الزمرة الجزئية من S المعرفة في المبرهنة السابقة فيكون :

① H_e زمرة جزئية عظمى في S

② أي زمرة جزئية عظمى G في S هي من الشكل H_f حيث f هو محايد G

③ الزمر الجزئية العظمى المختلفة في S تكون منفصلة (أي تقاطع أي اثنين من المجموعة التالية

البرهان :

① لتكن G زمرة جزئية عظمى في S تحوي H_e أي أن $H_e \subseteq G$ $\Leftarrow$ $G \cap H_e \neq \phi$
حسب المبرهنة الأخيرة $G \subseteq H_e$ وبما أن G زمرة جزئية عظمى ينتج $G = H_e$ أي أن H_e زمرة جزئية عظمى

② لتكن G زمرة جزئية عظمى في S تملك المحايد f أي بالتالي $G \cap H_f \neq \phi$ لأن $f \in G \cap H_f$
حسب المبرهنة الأخيرة فإن $G \subseteq H_f$ ومنه $G = H_f$

③ من ② نستنتج أن مجموعة الزمر الجزئية العظمى في S هي $A = \{H_e : e \in E_S ; e^2 = e\}$
لتكن e , f عنصرين جامدين في S بحيث أن $e \neq f$ فإن $H_e \cap H_f = \phi$ لأنه لو فرضنا جدلاً أن $H_e \cap H_f \neq \phi$ لكان حسب المبرهنة السابقة :

$$H_e \subseteq H_f \quad , \quad H_f \subseteq H_e \Rightarrow H_e = H_f \Rightarrow e = f$$

وهذا خلاف للفرض والفرض الجدلي خاطئ وبالتالي $H_e \cap H_f = \phi$

تمرين :

أثبت أن k_a زمرة جزئية عظمى في نصف الزمرة الدوارة $<a>$ ذات الدليل r والدور m

د) تجميعية:

$\forall x, y, z \in E \quad (x+y)+z = ((x+y) \wedge z') \vee ((x+y)' \wedge z)$

$= [(x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \wedge z'] \vee [(x \wedge y) \vee (x' \wedge y') \wedge z]$

$= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z)$

ونلاحظ أن الطرف الأيسر إذا بدلنا x بـ z و z بـ x فإنه لا يتغير ومنه

$(x+y)+z = (z \wedge y' \wedge x') \vee (z' \wedge y \wedge x') \vee (z \wedge y \wedge x) \vee (z' \wedge y' \wedge x)$

$(x+y)+z = (z+y)+x = x+(z+y) = x+(y+z)$

انتهت الحلول

الحل:

$K_a = \{a^n, a^{n+1}, \dots, a^{n+m-1}\}$ هي زمرة جزئية دوارة من $\langle a \rangle$ (أثبتناه سابقاً)

لكن $a^{k_m} = e$ حيادي في هذه الزمرة ⇐ H_e زمرة جزئية عظمى في $\langle a \rangle$

حسب المبرهنة السابقة

$$e \in H_e \cap K_a \Rightarrow H_e \cap K_a \neq \phi \Rightarrow K_a \subseteq H_e$$

ولكن $x \in H_e \Leftarrow xe = x \Leftarrow a^n e = a^n$ حيث $x = a^n$ لأن $(x \in \langle a \rangle)$

وبالتالي يكون:

$a^n \cdot a^{k_m} = a^n \Leftarrow a^{n+k_m} = a^n$ وهذه المساواة تتحقق عندما $n \geq n$

$\Leftarrow x = a^n \in K_a \Leftarrow H_e \subseteq K_a$ ومنه يكون $K_a = H_e$ وبالتالي يكون

K_a زمرة جزئية عظمى من $\langle a \rangle$

تعريف:

نقول عن نصف زمرة S أنها دورية إذا كان كل من أنصاف الزمر الجزئية الدوارة $\langle a \rangle$ $\forall a \in S$ منتهية

تمرين:

أثبت أن كل نصف زمرة منتهية دورية وأن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة

الحل:

نفرض أن S نصف زمرة منتهية (لنثبت أنها دورية) وليكن $a \in S$ فإن نصف الزمرة الجزئية الدوارة المولدة بالعنصر $\langle a \rangle$ تكون منتهية عندئذ $\forall a \in S$ ومنه ينتج S نصف زمرة دوارة

العكس: من أجل إثبات العكس ليس صحيح في الحالة العامة يكفي من أجل ذلك أن نعطي مثلاً يؤيد ذلك:

لتكن $S = P(N)$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية مع قانون التشكيل التقاطع إن S نصف زمرة دورية لأنه مهما تكن

$\forall A \in S = P(N) \Rightarrow \langle A \rangle = \{A\}$ وحسب التعريف منتهية

توضيح:

$\langle A \rangle = \{A, A^2, A^3, \dots$

$A, \underbrace{A \cap A}_{A}, \underbrace{A \cap A \cap A}_{A}, \dots\} = \{A\}$

أي أن Z يحقق زمرة دورية ولكنها غير منتهية

تمرين:

أثبت أن نصف الزمرة الدائرية $\langle a \rangle$ ذات الدليل r والدورة m تكون زمرة إذا وفقط إذا كان $r = 1$

الحل:

نفرض أن $r = 1$ فإن

~~[illegible]~~ $K_a = \{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{r+m-1}\}$ هي زمرة جزئية من $\langle a \rangle$ وحيث

$r = 1$ فإن $K_a = \{a, a^2, \dots, a^m\} = \langle a \rangle$

ومنه نستنتج أن $\langle a \rangle$ زمرة

العكس:

نفرض أن $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^r, \dots, a^{r+m-1}\}$ زمرة دائرية ونثبت أن $r = 1$ فيكون

a^{r+m-1} محايداً فيها إذا كانت

$$a \cdot a^{r+m-1} = a \Rightarrow a^{r+m} = a \underset{\text{حسب تعريف الدليل}}{\Rightarrow} a^r = a \Rightarrow r = 1$$

انتهت المحاضرة